MPSI – Quelques conseils pour bien débuter en maths

L'objet de ces lignes est de vous donner, comme l'indique le titre, quelques conseils, indications et exercices d'entraînement pour démarrer au mieux votre Sup en Mathématiques.

➤ Après des vacances bien méritées, remettez-vous dans le bain progressivement durant le mois d'août (au plus tard) en relisant certains chapitres de Terminale, et en faisant les exercices de révision que vous trouverez plus loin dans ces lignes.

➤ Si vous avez décidé de prendre un peu d'avance pendant les vacances : nous vous en félicitons, et vous conseillons deux livres de révisions (assez similaires) sur le programme de Terminale (et un peu plus d'ailleurs) :

☞ *Maths et informatique - Visa pour la prépa 2021-2022 - 6ème édition, éditions Dunod, paru en 2021*

Il existe d'ailleurs un extrait disponible en version pdf, au lien suivant :

https ://excerpts.numilog.com/books/9782100779659.pdf

☞ *Maths MPSI-MP2I - 6e édition, éditions Dunod, paru en 2021*

https ://excerpts.numilog.com/books/9782100779659.pdf

Cette liste (très courte je vous l'accorde) n'est évidemment pas exhaustive, et vous pouvez tout-à-fait utiliser d'autres ouvrages présentant le programme de Sup.

➤ Vous trouverez un peu plus loin dans ce document un formulaire de trigonométrie (vous reconnaîtrez sans doute certaines formules) que vous pouvez apprendre pour prendre de l'avance en début d'année. En effet, la trigonométrie et les fonctions trigonométriques (cosinus, sinus et tangente) joueront un rôle assez important cette année (en Physique comme en Mathématiques) ; autant profiter du fait que vous êtes en vacances et que vous avez du temps pour rendre votre début d'année plus confortable.

➤ Les premières semaines (environ jusqu'à la Toussaint) seront en grande partie consacrées à des notions que vous avez déjà rencontrées : les fonctions de référence, les nombres complexes et donc la trigonométrie.

Voici une liste non-exhaustive (ici encore), mais assez complète cependant, des connaissances qui vous seront utiles pour débuter cette année :

1) **Fonctions de référence**. Opérations sur les logarithmes, exponentielles et puissances. Variations et limites des fonctions $\ln, \exp$, $x \longmapsto x^n$, $x \longmapsto a^x$. Croissances comparées entre ces fonctions. Variations des fonctions cos et sin.

2) **Nombres complexes**. Forme algébrique $z = x + iy$ d'un nombre complexe. Partie réelle, partie imaginaire, conjugaison. Formes trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe. Module, argument. Résolution dans $\mathbb{C}$ d'une équation du second degré à coefficients réels.

3) **Pour préparer la suite du premier semestre**.

   a) **Fonctions numériques** — Définition, propriétés et opérations sur les limites. Théorème des gendarmes. Notion d'asymptote.

   Théorème des valeurs intermédiaires : “si f est continue (*resp.* continue et strictement monotone) sur $[a, b]$, alors tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un (*resp.* un unique) antécédent dans $[a, b]$”.

   Dérivées des fonctions usuelles, opérations sur les dérivées. Equation de la tangente en un point de la courbe d'équation $y = f(x)$.

   b) **Calcul intégral** — Interprétation en termes d'aire de l'intégrale. Calcul à l'aide d'une primitive. Linéarité, positivité et relation de Chasles. Toute fonction continue sur un intervalle admet une infinité de primitives sur cet intervalle différant d'une constante. Primitives usuelles.

   c) **Suites** — Théorème des gendarmes. Théorème de convergence des suites monotones. Définition et principale propriété des suites adjacentes. Raisonnement par récurrence. Définition de $\binom{n}{p}$, triangle de Pascal et formule du binôme de Newton.

   d) **Probabilités** — Vocabulaire des évènements : évènement élémentaire, contraire, certain, impossible ; évènements incompatibles. Probabilité d'une union, d'une intersection, du complémentaire. Probabilités conditionnelles, évènements indépendants. Formule des probabilités totales. Notion de variable alétoire réelle : définition, espérance, variance et écart-type. Loi uniforme, épreuve de Bernoulli, loi binomiale (mais pas la loi normale, qui ne sera réétudiée qu'en Spé).

e) **Algorithmique** — Difficile de vous donner un contour précis ici, car vous avez sans doute fait des activités très différentes d'une classe à l'autre. Mais puisque nous (re)verrons en début d'année les bases de l'algorithmique (boucles, instruction "SI… ALORS", *etc.*…), ce serait sans doute un atout que vous ayez compris par exemple comment fonctionne le programme de votre calculatrice qui vous donne les solutions d'une équation du second degré.

Quelques remarques pour terminer :

☞ Toutes les notions vues en spécialité Mathématiques en Terminale seront entièrement reprises en Sup pour les MPSI, en grande partie pour les PCSI.

☞ La calculatrice étant interdite dans une majorité d'épreuves de Mathématiques lors des concours, elle ne sera pas autorisée pendant la plupart des devoirs surveillés ; c'est pourquoi nous n'avons aucune exigence particulière quant au modèle.

☞ Si vous avez des questions urgentes, des inquiétudes, si vous souhaitez avoir des renseignements complémentaires, n'hésitez pas à m'envoyer un mail :

Mr ZAHND : `stephane.zahnd@ac-lille.fr`

☞ Pour achever cette liste de renseignements, vous pourrez vous faire une idée un peu plus précise (des cours, exercices, colles) en consultant :

la page web de la MPSI : `http://mpsijbmath.sitew.fr/`

la page web de la PCSI : `http://www.pcsijbmath.sitew.fr/`

Bonnes vacances à tous, et à l'année prochaine,

S. Zahnd.

Formulaire de trigonométrie

Formules remarquables :

(f1) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

(f2) $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$ si $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(f3) $1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ si $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

(f4) $\cos(-x) = \sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (cos est paire)

(f5) $\sin(-x) = -\sin(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (sin est impaire)

Valeurs remarquables :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$	$5\pi/6$	π
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	$-1/2$	$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{3}/2$	-1
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0
$\tan(x)$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	ND	$-\sqrt{3}$	-1	$-\sqrt{3}/3$	0

Formules d'addition :

(f6) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ **(f6b)** $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

(f7) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$ **(f7b)** $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$

(f8) $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}$ **(f8b)** $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \tan b}$

(f9) $\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a$ **(f10)** $\sin(2a) = 2 \sin a \cos a$

(f9b) $\cos(2a) = 2\cos^2 a - 1$ **(f11)** $\tan(2a) = \dfrac{2 \tan a}{1 - \tan^2 a}$

(f9c) $\cos(2a) = 1 - 2\sin^2 a$

(f12) $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos(2a)}{2}$ **(f13)** $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos(2a)}{2}$

Formules de linéarisation :

(f14) $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right)$

(f15) $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b) + \cos(a+b)\right)$

(f16) $\sin a \cos b = \dfrac{1}{2}\left(\sin(a+b) + \sin(a-b)\right)$

Formules de transformation de somme en produit :

(f17) $\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

(f18) $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

(f19) $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$

(f20) $\sin p - \sin q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$

Equations trigonométriques :

$$\cos x = \cos y \iff \begin{cases} x = y + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = -y + 2p\pi,\ p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \sin y \iff \begin{cases} x = y + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \pi - y + 2p\pi,\ p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\sin x = 0 \iff x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = \tan y \iff x = y + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

Exercices d'entraînement

I - Classe de Seconde

1 - Calcul numérique et calcul littéral

Exercice 1. *Effectuer les opérations suivantes et donner le résultat sous forme de fraction irréductible :*

$$A = \frac{2}{3} + \frac{3}{2},\ B = 3 - \frac{1}{9} + \frac{1}{3},\ C = \frac{1 + \frac{2}{5}}{3 - \frac{1}{5}},\ D = 3 + 5\frac{\frac{7}{2} - 2}{\frac{7}{4} - \frac{1}{2}}.$$

Exercice 2. *Simplifier et donner le résultat sous forme d'un produit ou d'un quotient à exposants positifs :*

$$A = \frac{(a^2b)^3c^2}{ab^{-3}},\ B = \frac{(a^2b)^{-3}c^5a^4}{b^3(-c)^{-3}a^2},\ C = \frac{(a^{-2}b)^4(-a^2b)^{-1}}{(-ab^{-1})^{-3}}.$$

Exercice 3. *Développer, réduire puis ordonner :*

$$A = 2x - 3(4x+3) + 5x - 3(x-4) \text{ et } B = 2x - (3(4x+3)+5)x - (3x-4).$$

Exercice 4. *Factoriser les expressions suivantes sous la forme d'un produit de facteurs de premier degré :*

$$A = (4x^2-9)(2x-3),\ B = (2x-1)^2 - (5x+4)^2,\ C = \left(\frac{x-3}{2}\right)^2 - \frac{x^2}{4}.$$

2 - Fonctions

Exercice 5. *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x-1)^2 - 4$.*

1) Calculer les images de $\frac{2}{5}$, $-\frac{1}{4}$ et $1+\sqrt{3}$ par la fonction f.

2) Déterminer les antécédents de 0 par f.

Exercice 6. *Parmi les fonctions suivantes, reconnaître les fonctions affines. On indiquera alors dans ce cas le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine (de la droite représentant la fonction).*

1) $x \mapsto \frac{3}{2}(x+1)$, *2)* $x \mapsto x - \frac{15}{100}x$, *3)* $x \mapsto 3 - \frac{1}{x}$, *4)* $x \mapsto x(1-3x)+2$

Exercice 7. *Résoudre les équations et inéquations suivantes :*

1) $x^2 = 4x - 4$ *2)* $0 \leq x^2 < 5$ *3)* $2\sqrt{x} - 1 = 0$.

Exercice 8. *Étudier le signe des expressions suivantes :*

$$A(x) = 3x - 4,\ B(x) = \frac{2x}{3}(1-x),\ C(x) = \frac{1-x}{x^2-2x},\ D(x) = \frac{x}{3} + \frac{4}{3x}.$$

II - Classe de Première

1 - Fonctions

Exercice 9. *Déterminer les racines des polynômes :* $A = 2x^2 + 3x - 2$, $B = 8x^2 + 2x - 1$ *et* $C = 3a^2 + 4a - 1$.

Exercice 10. *Mettre sous forme canonique chacun des trinômes suivants :* $A = 2x^2 + 8x - 2$, $B = y^2 + 3y + 1$, $C = -t^2 + 2t + 5$.

Exercice 11. *Sans écrire aucun calcul, donner pour chacun des polynômes suivants, son degré, son terme de plus haut degré et son terme constant :* $A = (x+2)(x+4)$, $B = (2x+5)(x-3)+2$, $C = (\sqrt{3}x+1)^2$, $D = x(x+4)(x-1)^2$.

Exercice 12. *Calculer la dérivée des fonctions ci-dessous, en précisant l'ensemble de validité de la formule obtenue :* $f_1(x) = x^2 + \sqrt{x} + 4$, $f_2(x) = x^3(x - \frac{1}{x})$, $f_4(x) = \frac{-5}{x-3}$, $f_5(x) = \frac{\sin(x)}{x + 2\cos(x)}$.

Exercice 13. *Déterminer :* $\lim_{x\mapsto 1^+} \frac{1}{x-1}$, $\lim_{x\mapsto 2^-} \frac{-3x}{2x-4}$, $\lim_{x\mapsto +\infty} \frac{x^2+1}{2x-3}$

2 - Suites

Exercice 14. *Exprimer* u_{n+1}, u_{2n} *et* u_{2n+1} *en fonction de* n *sachant que pour tout entier* n *: 1)* $u_n = 2n^2 - 3$, *2)* $u_n = (-1)^n$, *3)* $u_n = \cos(n\pi)$, *4)* $u_n = \sin(n\pi)$

Exercice 15. *1) La suite* $(u_n)_n$ *est arithmétique de premier terme* $u_0 = -3$ *et de raison 2. Calculer* u_1, u_2, u_3, u_{100}.

2) La suite $(v_n)_n$ *est géométrique de raison* 3 *avec* $v_5 = 2$. *Calculer* v_9.

Exercice 16. *Que vaut* $S = 1 + 2 + \cdots + 2015$ *?*

3 - Trigonométrie

Exercice 17. *A l'aide du cercle trigonométrique, donner les valeurs exactes de :* $\cos(\frac{5\pi}{6})$, $\sin(\frac{8\pi}{3})$, $\cos(\frac{-7\pi}{2})$, $\sin(2015\pi)$.

Exercice 18. *Exprimer à l'aide de* $\cos(x)$ *et* $\sin(x)$ *les nombres suivants :* $\cos(x + 9\pi)$, $\sin(3\pi + x)$, $cos(-x - 100\pi)$, $\sin(\pi + x) + \cos(\pi - x)$.

III - Classe de Terminale

1 - Exponentielle et logarithme

Exercice 19. *Simplifier les expressions suivantes :* $A = 3e^{5x}(-4e^{-4x+2})$, $B = e^{-10x+3} \times \left(e^{-x-2}\right)^{-2} \times \left(e^{3x-2}\right)^3$.

Exercice 20. *Calculer en fonction de* $\ln(2)$ *et* $\ln(3)$ *les expressions suivantes :* $A = \ln(48)$, $B = \ln(27/64)$.

Exercice 21. *Déterminer les primitives des fonction suivantes sur* $\mathbb{R}$ *:* $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 1$ *;* $g(x) = -3\cos(x) + 2\sin(x) + 1$ *;* $h(x) = e^{3x+2}$ *;* $i(x) = e^x(e^x - 1)^2$

2 - Nombres complexes

Exercice 22. *Ecrire sous forme algébrique (a + ib) les nombres complexes suivants :* $z_1 = (2 + i\sqrt{3})(5 - i) + (\frac{1}{2} + 3i)^2$, $z_2 = \frac{1}{\sqrt{3} + 2i}$, $z_3 = \frac{1 + 4i}{1 - \sqrt{2}i}$.

Exercice 23. *Donner le module de* $z_1 = \sqrt{6} + i\sqrt{2}$, $z_2 = (1+2i)^3$, $z_3 = \frac{53 - i}{53 + i}$.

Exercice 24. *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *les équations :* $z^2 - 3z + 18 = 0$, $z^2 + 9z - 4 = 0$, $z^2 - (1 - \sqrt{3})z + \sqrt{3} = 0$.

3 - Probabilités

Exercice 25. *On dispose de trois urnes :*

- *l'urne A contient 3 billes rouges et 5 billes noires ;*
- *l'urne B contient 2 billes rouges et 1 billes noires ;*
- *l'urne C contient 2 billes rouges et 3 billes noires ;*

On prend une urne au hasard et on tire une bille de l'urne. Si la bille tirée est rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne A ?

4 - Hors-catégorie

Exercice 26. *Etudier la fonction* $f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{x}}}}\right)$

Exercice 27. *Etablir que pour tout entier naturel* n *on a :* $3^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$

Exercice 28. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $\cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) = 0$.

Exercice 29. *Déterminer la valeur exacte de* $\cos(\pi/8)$, *puis celle de* $\sin(\pi/8)$.