Cahier de vacances de mathématiques

Soyez les bienvenus au Lycée Jean Bart ! Vous trouverez ci-après 8 fiches d'exercices de mathématiques pour ne pas perdre la main pendant l'été.

Le prérequis pour cette année à venir est principalement le programme de mathématiques complémentaires de Terminale. À vous de travailler en autonomie les différents thèmes, en ciblant en priorité ceux abordés dans les 8 fiches, selon vos points forts et vos points faibles. Pour cela, deux références de manuels en accès libre :

- Le Barbazo : `https://mesmanuels.fr/acces-libre/9782016290088`
- Le Magard : `https://manuel.sesamath.net/numerique/index.php?ouvrage=mstscomp_2020&page_gauche=1`

Chaque fiche d'exercices est organisée ainsi :

- Une présentation du thème de la fiche et des prérequis
- Une liste d'exercices, dont le temps de résolution (incluant la longueur et la technicité des calculs) est symbolisé par une (🕓) à quatre (🕓🕓🕓🕓) horloges. Ils doivent être résolus **sans calculatrice**, même si c'est tentant (surtout pour les deux premières fiches).
- À la fin de la feuille sont affichées les réponses mélangées : c'est une première indication pour savoir si la réponse que vous avez trouvée est plausible.

Essayez de pratiquer les exercices à un rythme régulier, surtout pendant les deux dernières semaines d'août. Rédgiez-les proprement, il n'y a pas que le résultat qui est important ! Ceux qui le souhaitent pourront me rendre leur travail (même incomplet) le jour de la rentrée afin d'avoir un retour. D'ici là, si vous avez la moindre question n'hésitez pas à m'envoyer un mail à l'adresse suivante :
`alexandre.boyer.math@gmail.com`.

Bon travail et bon repos, car les vacances servent aussi à ça... !

Alexandre Boyer, professeur de mathématiques en ECG1.

Puissances

Prérequis
Opérations sur les puissances (produits, quotients), décompostion en facteurs premiers, sommes d'expressions fractionnaires (même dénominateur), identités remarquables, factorisations et développements simples.

Exercice 1.1

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10.

a) $10^5 \cdot 10^3$

b) $(10^5)^3$

c) $\dfrac{10^5}{10^3}$

d) $\dfrac{10^{-5}}{10^{-3}}$

e) $\dfrac{(10^5 \cdot 10^{-3})^5}{(10^{-5} \cdot 10^3)^{-3}}$

f) $\dfrac{(10^3)^{-5} \cdot 10^5}{10^3 \cdot 10^{-5}}$

Exercice 1.2

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme a^n avec a et n deux entiers relatifs.

a) $3^4 \cdot 5^4$

b) $(5^3)^{-2}$

c) $\dfrac{2^5}{2^{-2}}$

d) $(-7)^3 \cdot (-7)^{-5}$

e) $\dfrac{6^5}{2^5}$

f) $\dfrac{(30^4)^7}{2^{28} \cdot 5^{28}}$

Exercice 1.3

Dans chaque cas, donner le résultat sous la forme $2^n \cdot 3^p$, où n et p sont deux entiers relatifs.

a) $\dfrac{2^3 \cdot 3^2}{3^4 \cdot 2^8 \cdot 6^{-1}}$

b) $2^{21} + 2^{22}$

c) $\dfrac{3^{22} + 3^{21}}{3^{22} - 3^{21}}$

Exercice 1.4

Dans chaque cas, simplifier au maximum.

a) $\dfrac{8^{17} \cdot 6^{-6}}{9^{-3} \cdot 2^{42}}$

b) $\dfrac{12^{-2} \cdot 15^4}{25^2 \cdot 18^{-4}}$

c) $\dfrac{36^3 \cdot 70^5 \cdot 10^2}{14^3 \cdot 28^2 \cdot 15^6}$

Exercice 1.5

Dans chaque cas, simplifier au maximum l'expression en fonction du réel x.

a) $\dfrac{x}{x-1} - \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{2}{x^2-1}$

b) $\dfrac{2}{x+2} - \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{8}{x^2-4}$

c) $\dfrac{x^2}{x^2-x} + \dfrac{x^3}{x^3+x^2} - \dfrac{2x^2}{x^3-x}$

d) $\dfrac{1}{x} + \dfrac{x+2}{x^2-4} + \dfrac{2}{x^2-2x}$

Réponses mélangées

10^{-2}	10^{15}	15^4	$\dfrac{x}{x+1}$	$(-7)^{-2}$	$\dfrac{1}{x-2}$	3^{28}	10^2	3^5	10^4	$\dfrac{2}{x-2}$
10^8	$\dfrac{2x}{x+1}$	3^{10}	$2^{-4} \cdot 3^{-1}$	8	$2^6 \cdot 5$	2	2^7	$2^{21} \cdot 3$	10^{-8}	5^{-6}

Fiche de calcul n° 2

Fractions

Prérequis
Règles de calcul sur les fractions.

Simplification

Exercice 2.1 — Simplification de fractions.

Simplifier les fractions suivantes (la lettre k désigne un entier naturel non nul).

a) $\dfrac{32}{40}$ b) $8^3 \times \dfrac{1}{4^2}$ c) $\dfrac{27^{-1} \times 4^2}{3^{-4} \times 2^4}$ d) $\dfrac{(-2)^{2k+1} \times 3^{2k-1}}{4^k \times 3^{-k+1}}$

Exercice 2.2 — Sommes, produits, quotients, puissances.

Écrire les nombres suivants sous forme d'une fraction irréductible.

a) $\dfrac{2}{4} - \dfrac{1}{3}$ b) $\dfrac{2}{3} - 0{,}2$ c) $\dfrac{36}{25} \times \dfrac{15}{12} \times 5$ d) $-\dfrac{2}{15} \div (-\dfrac{6}{5})$

Exercice 2.3 — Un petit calcul.

Écrire $\dfrac{0{,}5 - \frac{3}{17} + \frac{3}{37}}{\frac{5}{6} - \frac{5}{17} + \frac{5}{37}} + \dfrac{0{,}5 - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 0{,}2}{\frac{7}{5} - \frac{7}{4} + \frac{7}{3} - 3{,}5}$ sous forme d'une fraction irréductible.

Exercice 2.4 — Un produit de fractions.

Soit $t \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$. On donne $A = \dfrac{1}{1+t^2} - \dfrac{1}{(1+t)^2}$ et $B = \big(1+t^2\big)(1+t)^2$.

Simplifier AB autant que possible.

Comparaison

Exercice 2.5 — Règles de comparaison.

Comparer les fractions suivantes avec le signe « > », « < » ou « = ».

a) $\dfrac{3}{5} \dots \dfrac{5}{9}$ b) $\dfrac{12}{11} \dots \dfrac{10}{12}$ c) $\dfrac{125}{25} \dots \dfrac{105}{21}$

Exercice 2.6 — Produit en croix.

Les nombres $A = \dfrac{33\ 215}{66\ 317}$ et $B = \dfrac{104\ 348}{208\ 341}$ sont-ils égaux ? Oui ou non ?

Réponses mélangées

$\dfrac{7}{15}$ $>$ 3 $=$ 9 $-2 \times 3^{3k-2}$ $\dfrac{4}{5}$

2^5 $\dfrac{16}{35}$ $\dfrac{1}{9}$ $>$ $\dfrac{1}{6}$ Non $2t$

Fiche de calcul n° 3 020A

Suites numériques

Prérequis
Suites récurrentes. Suites arithmétiques. Suites géométriques.

Calcul de termes

Exercice 3.1 — Suite explicite.

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{2n+3}{5} \times 2^{n+2}$. Calculer :

a) u_0 b) u_1 c) u_6 d) u_{n+1}

Exercice 3.2 — Suite récurrente.

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n + 3$. Calculer :

a) u_1 b) u_2 c) u_3

Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 3.3 — Suite arithmétique.

La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite arithmétique de premier terme $a_0 = 1$ et de raison $r = 2$.

a) Donner l'expression explicite de a_n en fonction de n.

b) Calculer a_{100}.

c) Calculer la somme des 100 premiers termes $a_0 + a_1 + \ldots + a_{99}$.

d) Calculer la somme des 101 premiers termes $a_0 + a_1 + \ldots + a_{100}$.

Exercice 3.4 — Suite géométrique.

La suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $g_0 = 3$ et de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

a) Donner l'expression explicite de g_n en fonction de n.

b) Calculer g_{10}.

c) Calculer la somme des 10 premiers termes $g_0 + g_1 + \ldots + g_9$.

d) Calculer la somme des 11 premiers termes $g_0 + g_1 + \ldots + g_{10}$.

Réponses mélangées

201	$\dfrac{(2n+5)\cdot 2^{n+3}}{5}$	$2n+1$	5	$\dfrac{3}{1024}$	$\dfrac{3}{2^n}$	13	
768	$10\,000$	$\dfrac{6141}{1024}$	8	$10\,201$	29	$\dfrac{12}{5}$	$\dfrac{3069}{512}$

Calcul littéral

Prérequis
Les identités remarquables.

Développer, réduire et ordonner

Exercice 4.1

Développer, réduire et ordonner les expressions suivantes selon les puissances décroissantes de x.

a) $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^3$

b) $(x-1)^3(x^2+x+1)$

c) $(x+1)^2(x-1)(x^2-x+1)$

d) $(x+1)^2(x-1)(x^2+x+1)$

e) $(x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)$

f) $(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

Exercice 4.2

Développer, réduire et ordonner les expressions polynomiales suivantes selon les puissances croissantes de x.

a) $(x^2+x+1)^2$

b) $(2x+3)(5x-8)-(2x-4)(5x-1)$

c) $(x+1)(x-1)^2-2(x^2+x+1)$

d) $\left(x^2+\sqrt{2}x+1\right)\left(1-\sqrt{2}x+x^2\right)$

Factoriser

Exercice 4.3 — Petite mise en jambe.

Factoriser les expressions polynomiales de la variable réelle x suivantes.

a) $-(6x+7)(6x-1)+36x^2-49$

b) $25-(10x+3)^2$

c) $(6x-8)(4x-5)+36x^2-64$

d) $(-9x-8)(8x+8)+64x^2-64$

Exercice 4.4 — À l'aide de la forme canonique.

Factoriser les polynômes de degré deux suivants en utilisant leur forme canonique. On rappelle que la forme canonique de ax^2+bx+c prend la forme $a(x-\alpha)^2+\beta$ (où $a \neq 0$).

a) x^2-2x+1

b) x^2+4x+4

c) x^2+3x+2

d) $-5x^2+6x-1$

Réponses mélangées

$-1-3x-3x^2+x^3$ $\quad x^5-x^3-x^2+1$ $\quad x^5+2x^4+x^3-x^2-2x-1$ $\quad (x-1)^2$

$4(5x+4)(-5x+1)$ $\quad x^4+x^2+1$ $\quad x^5-x^3+x^2-1$ $\quad -5(x-1)\left(x-\frac{1}{5}\right)$ $\quad (x+1)(x+2)$

$-8(x+1)(x+16)$ $\quad -6(6x+7)$ $\quad 1+x^4$ $\quad 1+2x+3x^2+2x^3+x^4$ $\quad 2(3x-4)(10x+3)$

$(x+2)^2$ $\quad 8x^3-6x^2+\frac{3}{2}x-\frac{1}{8}$ $\quad -28+21x$ $\quad x^5-2x^4+x^3-x^2+2x-1$

Équations du second degré

Prérequis
Recherche des racines d'un polynôme de second degré, factorisation et signe.

Recherche de racines

Exercice 5.1 — Résolution d'équations.

Résoudre les équations suivantes.

a) $x^2 - 6x + 9 = 0$

b) $x^2 - 5x + 6 = 0$

c) $9x^2 + 6x + 1 = 0$

d) $x^2 - 5x = 0$

e) $2x^2 + 3x = 0$

f) $2x^2 + 3 = 0$

g) $3x^2 - 11x + 8 = 0$

h) $x^2 - 13x + 42 = 0$

i) $x^2 + 8x + 15 = 0$

Exercice 5.2 — Avec le discriminant.

Déterminer la valeur à donner à m pour que les équations suivantes admettent une racine double, et préciser la valeur de la racine dans ce cas.

a) $x^2 - (2m+3)x + m^2 = 0$

b) $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 = 0$

Factorisations et signe

Exercice 5.3 — Signe d'un trinôme.

Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles les expressions suivantes sont positives ou nulles.

a) $x^2 - (\sqrt{2}+1)x + \sqrt{2}$

b) $-x^2 + 2x + 15$

c) $(x+1)(3x-2)$

d) $\dfrac{x-4}{2x+1}$

Exercice 5.4 — Factorisation.

Comment choisir les paramètres a et b pour que les égalités suivantes soient vraies pour tout x ?

a) $2x^2 + 7x + 6 = (x+2)(ax+b)$

b) $-4x^2 + 4x - 1 = (2x-1)(ax+b)$

Réponses mélangées

$]-\infty, -1/2[\cup [4, +\infty[$ $\quad \varnothing \quad$ $m = -1$ et $x = -2$, ou $m = 7$ et $x = 2/3$ $\quad$ $a = 2$ et $b = 3$

$0, 5$ $\quad$ $m = -3/4$ et $x = 3/4$ $\quad$ $a = -2$ et $b = 1$ $\quad$ $-3, -5$ $\quad$ $[-3, 5]$ $\quad$ $3, 3$ $\quad$ $-3/2, 0$

$]-\infty, 1] \cup [\sqrt{2}, +\infty[$ $\quad$ $6, 7$ $\quad$ $-1/3, -1/3$ $\quad$ $2, 3$ $\quad$ $]-\infty, -1] \cup [2/3, +\infty[$ $\quad$ $1, 8/3$

Fiche de calcul n° 6

004A

Racines carrées

Prérequis

Racines carrées. Méthode de la quantité conjuguée.

Exercice 6.1 — Définition de la racine carrée.

Exprimer sans racine carrée les expressions suivantes.

a) $\sqrt{(-5)^2}$ b) $\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}$ c) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$ d) $\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}$

Exercice 6.2 — Transformation d'écriture.

Écrire aussi simplement que possible les expressions suivantes.

a) $(2\sqrt{5})^2$ c) $(3+\sqrt{7})^2-(3-\sqrt{7})^2$ e) $\left(\dfrac{5-\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$

b) $(2+\sqrt{5})^2$ d) $\left(\sqrt{2\sqrt{3}}\right)^4$ f) $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{2}-\sqrt{3})^2$

Exercice 6.3 — Utilisation de la méthode de la quantité conjuguée.

Pour chacune des expressions suivantes, donner une fraction égale avec un entier au dénominateur.

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ c) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$ e) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{2}}$ f) $\left(\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1}\right)^2$

Exercice 6.4 — Avec une variable.

On considère la fonction f qui à $x>1$ associe $f(x)=\sqrt{x-1}$.

Pour tout $x>1$, calculer et simplifier les expressions suivantes.

a) $f(x)+\dfrac{1}{f(x)}$ b) $\dfrac{f(x+2)-f(x)}{f(x+2)+f(x)}$ c) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Exercice 6.5 — Mettre au carré.

Élever les quantités suivantes au carré pour en donner une expression simplifiée.

a) $\sqrt{3+\sqrt{5}}-\sqrt{3-\sqrt{5}}$ b) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

Réponses mélangées

$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $-\sqrt{3}+2$ $\sqrt{2}$ $2\sqrt{2}$ $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ $3-2\sqrt{2}$ $50-25\sqrt{3}$

$\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{2}$ $\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x-1}$ $x-\sqrt{x^2-1}$ 20 10 $9-\dfrac{10}{3}\sqrt{2}$ $1-\sqrt{10}+\sqrt{15}$

$12\sqrt{7}$ 5 $\sqrt{7}-2$ $\sqrt{3}-1$ $9+4\sqrt{5}$ $2-\sqrt{2}-\sqrt{3}+\dfrac{1}{2}\sqrt{6}$ 12

Exponentielle et logarithme

Prérequis
Exponentielle, logarithme.

Exercice 7.1 — Logarithmes.

Calculer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$, $\ln 3$ et $\ln 5$.

a) $\ln 16$

b) $\ln \frac{1}{12}$

c) $\ln 0{,}125$

d) $\ln 72 - 2\ln 3$

e) $\ln 36$

f) $\ln(2{,}25)$

g) $\ln 500$

h) $\ln \frac{16}{25}$

Exercice 7.2 — Exponentielles.

Écrire les nombres suivants le plus simplement possible.

a) $\ln(\mathrm{e}^{\frac{1}{3}})$

b) $\mathrm{e}^{3\ln 2}$

c) $\ln(\sqrt{e})$

d) $\mathrm{e}^{-2\ln 3}$

e) $\mathrm{e}^{\ln 3 - \ln 2}$

f) $-\mathrm{e}^{-\ln \frac{1}{2}}$

g) $\mathrm{e}^{-\ln \ln 2}$

h) $\ln\left(\frac{1}{\mathrm{e}^{17}}\right)$

Exercice 7.3 — Étude d'une fonction.

Soit $f : x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$.

a) Préciser l'ensemble de définition de cette fonction.

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$. *Indication : factoriser par e^x au numérateur et au dénominateur.*

c) Déterminer la limite de f en $-\infty$. *Indication : s'inspirer de la question précédente.*

Exercice 7.4 — Inéquations.

Résoudre les inéquations suivantes (d'inconnue x). *Indication : utiliser la croissance de la fonction* ln.

a) $\mathrm{e}^{3x-5} \geqslant 12$

b) $1 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2+x}$

c) $\mathrm{e}^{1+\ln x} \geqslant 2$

d) $\mathrm{e}^{-6x} \leqslant \sqrt{\mathrm{e}}$

Réponses mélangées

$3\ln 2$ $\quad 8 \quad \frac{3}{2} \quad x \geqslant -\frac{1}{12} \quad -1 \quad 2\ln 2 + 2\ln 3 \quad 1 \quad x \geqslant \frac{\ln 12 + 5}{3}$

$-\ln 3 - 2\ln 2 \quad -17 \quad \frac{1}{2} \quad 4\ln 2 \quad x \geqslant \frac{2}{e} \quad x \in [0, 1] \quad -3\ln 2$

$2\ln 3 - 2\ln 2 \quad \frac{1}{\ln 2} \quad \mathbb{R} \quad 3\ln 5 + 2\ln 2 \quad -2\ln 5 + 4\ln 2 \quad \frac{1}{9} \quad -2 \quad \frac{1}{3}$

Fiche de calcul n° 8

Dérivation

Prérequis

Dérivées des fonctions usuelles. Formules de dérivation.

Exercice 8.1 — Calculs de dérivées.

Déterminer le domaine de dérivabilité de chacune des fonctions f ci-dessous, puis l'expression de $f'(x)$.

a) $f(x) = (x^2 + 3x + 2)(2x - 5)$.

b) $f(x) = (x^2 - 2x + 6)\exp(2x)$.

c) $f(x) = (3x^2 - x)\ln(x - 2)$

d) $f(x) = (x^2 - 5x)^5$.

e) $f(x) = \ln(x^2 + 1)$.

f) $f(x) = \ln(\ln(x))$.

g) $f(x) = (2 - x)\exp(x^2 + x)$.

h) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{3x + 2}$.

i) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x}{\ln(x)}$.

j) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$.

Exercice 8.2 — Dériver pour étudier une fonction.

Déterminer le domaine de dérivabilité de chacune des fonctions f ci-dessous, puis l'expression de $f'(x)$. Factoriser $f'(x)$ le plus possible.

a) $f(x) = \dfrac{1}{3 - x} + \dfrac{1}{2 + x}$.

b) $f(x) = x^2 - \ln(x + 1)$

c) $f(x) = \ln(x^2 + x - 2) - \dfrac{x + 2}{x - 1}$.

d) $f(x) = \dfrac{x}{x + 1} + x - 2\ln(x + 1)$.

Réponses mélangées

$\mathbb{R},\ \dfrac{2x}{x^2+1}$ $\qquad$ $\mathbb{R},\ 6x^2 + 2x - 11$ $\qquad$ $]0, +\infty[,\ \dfrac{2 - 3x}{2\sqrt{x}(3x+2)^2}$ $\qquad$ $]1, +\infty[,\ \dfrac{1}{x\ln(x)}$

$]1, +\infty[,\ \dfrac{(4x+3)\ln(x) - 2x - 3}{(\ln(x))^2}$ $\qquad$ $\mathbb{R},\ (2x^2 - 2x + 10)\exp(2x)$

$\mathbb{R} \setminus \{3, -2\},\ \dfrac{10x - 5}{(3-x)^2(2+x)^2}$ $\qquad$ $\mathbb{R},\ 5(x^2 - 5x)^4(2x - 5)$ $\qquad$ $]-1, +\infty[,\ \dfrac{x^2}{(x+1)^2}$

$]2, +\infty[,\ (6x - 1)\ln(x - 2) + \dfrac{3x^2 - x}{x - 2}$ $\qquad$ $]-1, +\infty[,\ \dfrac{2}{x+1}\left(x + \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x + \dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

$]1, +\infty[,\ \dfrac{2x^2 + 2x + 5}{(x+2)(x-1)^2}$ $\qquad$ $]-3, 3[,\ \dfrac{9}{(9 - x^2)\sqrt{9 - x^2}}$ $\qquad$ $\mathbb{R},\ (-2x^2 + 3x + 1)\exp(x^2 + x)$